

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ

УДК 51

Для цитирования: Мамхегов А.Б. К дидактико-методическим аспектам проблемного обучения математике // Научно-методический журнал «Поиск научных решений». 2025. № 4. С. 12–32.

DOI: 10.61077/2949-4818-2025-4-12-32

**К дидактико-методическим аспектам
проблемного обучения математике****Мамхегов Астемир Билостанович**

Государственное бюджетное учреждение
дополнительного профессионального образования «Центр непрерывного
повышения профессионального мастерства педагогических работников»
Министерства просвещения и науки Кабардино-Балкарской Республики

Аннотация. В работе исследуются понятия «проблемная ситуация», «принцип проблемности в обучении» и «метод проблемного обучения» в контексте развития школьного математического образования. Анализ опирается на опыт реформы математического образования середины 60-х – середины 80-х годов прошлого века и модель учебной математической деятельности А.А. Столяра. Также представлен дидактический материал для применения метода проблемного обучения.

Ключевые слова: проблема, ситуация, проблемная ситуация, задача, проблемный метод обучения, принцип проблемности в обучении, опыт, практика, стимул и интерес к изучению математического материала, источники проблемных ситуаций, дидактический материал.

**On didactic and methodological aspects
of problem-based mathematics education****Mamkhegov Astemir Bilostanovich**

State Budgetary Institution of Additional Professional Education
"Center for Continuous Development of Professional Mastery of Teaching Staff"
of the Ministry of Enlightenment and Science of the Kabardino-Balkarian Republic

Abstract. The paper examines the concepts of "problematic situation", "principle of problem-based learning" and "method of problem-based learning" in the context of school mathematics education. The analysis is based on the experience of the reform of mathematical education in the mid-60s–mid-80s of the last century and the model of educational mathematical

activity by A.A. Stolyar. Didactic material for the application of the problem-based learning method is also presented.

Keywords: problem, situation, problematic situation, task, problematic teaching method, the principle of problematic learning, experience, practice, incentive and interest in studying mathematical material, sources of problematic situations, didactic material.

Работа посвящается актуальной задаче педагогической науки – проблемному методу, одному из важнейших средств повышения эффективности обучения математике. О проблемном обучении написано много в педагогической литературе. К сожалению, некоторые центральные методические издания способствовали снижению интереса к этим методам. Однако, на наш взгляд, проблемное обучение остаётся актуальной темой, так как в школьной практике оно пока не находит должной реализации.

Бытует мнение, что указанное положение дел «вовсе не означает, что о сущности проблемного обучения следует говорить ещё и ещё». Действительно, с одной стороны, можно говорить о какой-то моде на проблемное обучение, существовавшей в 60–70 годах прошлого века. Теоретизирование по вопросу о том, что такое проблемное обучение, приводило к тому, что «просто от такой говорильни положение дел на уроках не улучшалось». Конкретных рекомендаций, которыми могли бы воспользоваться учителя в своей работе обычно авторы не предлагали, а если и да – то разобщённые задачи, часть из которых общеизвестны, а другие надуманы. Создаётся впечатление, что авторы большинства статей по данной тематике, рассуждая о проблемном обучении, сами не всегда представляют себе, как от общих слов перейти к конкретной системе методов и средств реализации проблемного обучения. Но ведь это самое основное, что должно быть в таких работах. И уж если всерьёз говорить о реализации проблемного обучения, то начинать, конечно, надо рано, а не в 10–11 классах.

В настоящее время внимание методико-математической общественности сосредотачивается на поиске путей повышения интереса учащихся к математике. При этом, на наш взгляд, должен учитываться опыт предыдущих реформ математического образования, в частности, того положительного, что можно извлечь из так называемой «колмогоровской» реформы середины 60-х – начале 80-х годов прошлого века. Мы уже обсуждали этот вопрос по отношению к концепции обучения математике, где, в частности, рассматривали взаимосвязи типов проблемных ситуаций с компонентами учебной математической деятельности [Мамхегов 2023].

Сейчас серьёзное внимание должно быть уделено условиям и средствам реализации проблемного обучения по каждому конкретному учебному предмету, по каждому конкретному классу, по каждой конкретной

теме программного материала. Вместе с тем, на наш взгляд, студентам и учителям целесообразно ознакомиться ещё раз с убеждённым, аргументированным отстаиванием положительной роли и места проблемного метода, в частности, проблемных ситуаций в школьном обучении математике. При этом, мы исходим из того, что абстрактный характер математических фактов нуждается в глазах учащихся в показе практической необходимости его, что, естественно влечёт к повышению интереса, активности учащихся к ним.

Таким образом, первая часть работы посвящена определению понятий «проблема», «задача» и «проблемная ситуация». Здесь излагается круг вопросов, посвящённых проблемным ситуациям в процессе преподавания математики в школе вообще, проблемным ситуациям в конкретных классах, начиная с пятого. Изложение теоретических и методических аспектов проблемных ситуаций в различных классах необходимо иллюстрировать большим числом подобранных задач по алгебре, геометрии и физике.

Рассматривая мотивы к изучению учащимися математики, ранее мы пришли к выводу, что рассматриваемые психологами и методистами наборы мотивов, кроме любознательности, слабо затрагивают внутренние побудительные мотивы учения, специфические методико-математические факторы активизации обучения математике. Путь к ней лежит через проблемные ситуации в процессе обучения математике [Мамхегов 2023].

Однако, судя по дискуссиям в печати, нередко происходит пересмотр и переоценка содержания многих приёмов и методов обучения вообще и математике в частности.

Объектом такого обсуждения стал также метод проблемного обучения. Причём, в ходе такой переоценки высказываются, как обычно это бывает в процессе поиска наиболее оптимальных решений проблемы, весьма категорические и часто диаметрально противоположные точки зрения, которые, как правило, оказываются крайне преувеличенными, а потому далёкими от истины.

Вместе с тем, в одном из основных пособий для специальности 2104 «Математика» 1985 года сказано: «Представляется более целесообразным, если темы в учебниках начинаются с создания характерных проблемных ситуаций» [Столяр, Черкасов 1985, 260]. Это уже в какой-то степени говорит об отношении методистов математики к этой проблеме, хотя продолжают раздаваться и другие мнения. Одно бесспорно: фетишизация чего-либо или возведение в ранг (панацеи от всех бед в обучении) того или иного метода в ущерб другим всегда приводит к нежелательным

последствиям. В связи с этим заметим, что проблемный метод не самоцель, а средство повышения эффективности обучения учащихся, причём весьма эффективное при грамотном его использовании. Этот метод существенно активизирует мыслительную деятельность учащихся, готовит к творческой деятельности, вводит в круг плодотворных поисков решения нестандартных задач. «Начальным моментом мыслительного процесса обычно является проблемная ситуация. Мыслить человек начинает тогда, когда у него появляется потребность что-то понять» [Рубенштейн 1946, 347].

Проблемное обучение нацелено на постоянное стимулирование активности, самостоятельности, инициативы. Ясно, что это готовит уже на школьной скамье будущего творца, созидателя, а не только исполнителя, который также нужен обществу, но это реализуется уже с помощью других методов – репродуктивного и объяснительно-иллюстрированного.

В последнее время актуальность проблемного метода обучения неоправданно ставится под сомнение. Некоторые специалисты даже говорят о том, что этот метод стал модным трендом. Чтобы разобраться в ситуации, рассмотрим конкретный пример из программы 10-го класса. Этот пример позволит наглядно продемонстрировать преимущества проблемного подхода. Именно благодаря этому методу удаётся эффективно развивать познавательную активность учащихся, формировать их самостоятельность и творческие способности. А ведь именно эти качества крайне необходимы современным школьникам, которым предстоит стать созидателями и применять полученные знания на практике, продолжая своё образование самостоятельно.

В курсе X класса изучается теорема о трёх перпендикулярах. Традиционно формулируют теорему (это делает учитель монологическим методом): «Если из точки пространства проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, то прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярная к проекции этой наклонной, перпендикулярна самой наклонной». Затем доказывают её синтетическим методом с помощью каскада треугольников или реже – векторным методом.

У учащихся сразу возникает ряд недоумённых вопросов: зачем ещё столь громоздкая и весьма сомнительная для практических целей «заумная» теорема? Этих теорем и так предостаточно!

Это снижает интерес к изучению теоремы, а без интереса обучение не может быть эффективным. Ученик будет притворяться, что слушает, но не будет думать. Кроме того, такое доказательство ориентировано на запоминание и не стимулирует активность и самостоятельность.

К изучению этой теоремы подойдём иначе. До формулировки теоремы, но перед её изучением, сформулируем перед классом (программа X класса) близкую учащимся практическую задачу: лампа висит на потолке в классе. Как измерить расстояние от неё до линии пересечения пола и стены?

Будут различные предложения – ответы. Близость задачи, доступность её, простота постановки задачи привлекают внимание учащихся, будит интерес, активность и любознательность. В числе таких предложений могут быть следующие:

1) «Натянем веревку от лампы до линии пересечения пола и стены и измерим». Но расстояние это длина отрезка перпендикуляра. Как это сделать в воздухе? И какая будет уверенность, что вы попали в основание перпендикуляра от лампы до линии пересечения пола и стены? С математической точки зрения возражение убедительное.

2) «С помощью отвеса опустим перпендикуляр от лампы на пол. Практически это реализуемо, и точность – в пределах допустимой погрешности при этих измерениях. Из основания этого перпендикуляра (на полу) проведём перпендикуляр к линии пересечения пола и стены (такое построение возможно на плоскости). Основание его соединим с лампой (две «точки» веревкой можно соединить). Длина этого «отрезка» и будет искомым расстоянием».

Это предложение то, что нам нужно. Однако стоит обратить внимание учащихся на его гипотетический характер. Этот «отрезок» должен быть перпендикулярен к линии пересечения пола и стены. Несмотря на её очевидность, мы пока не можем утверждать её истинности. Но возникло желание верить, что это так, и сформулировать такое утверждение.

В математике за истинное можно принять только то, что получило характер общности, доказано дедуктивно.

На базе такого интереса можно теперь сформулировать теорему и доказать. Это можно сделать одним из известных методов, желательнее всего здесь – методом проблемного изложения или эвристическим.

Контрастны приведённые подходы к изучению этой теоремы.

В первом случае теорема навязывается учащимся, во втором она возникает в мышлении учащихся в процессе поиска решения вполне понятной и близкой учащимся задачи, и никто не навязывает её. В этом основная суть проблемной ситуации, проблемного метода в обучении – об этом более подробный разговор ниже.

При всех несомненных плюсах проблемное обучение, в частности создание проблемных ситуаций, имеет и минусы. Например:

изучение программного материала этим методом потребует большего времени, чем традиционным, объяснительно-иллюстративным;

не всякий материал допускает одинаковое использование этого метода. Например, теорема «не существует рационального числа, квадрат которого равен двум». Доказательство лучше излагать монологическим методом – связно, лаконично, экономно.

Сказанное вовсе не умаляет значения проблемного метода, каждому своё место!

В методической литературе часто можно встретить поддержку и апелляции в адрес проблемного обучения математике. Однако, в них по сути нет серьёзного анализа рассматриваемой проблемы. В связи с этим, естественно считать актуальным рассмотрение проблемы изучения сути метода проблемного метода и показа эффективности на конкретном программном материале.

Значению, сути и применения метода проблемного метода (проблемной ситуации) в обучении математике и посвящена данная работа.

Также, как и в цитированной выше нашей работе [Мамхегов 2023], в настоящей статье мы воспользовались своими конспектами 1980-х годов по методике преподавания математики [Мамхегов 1985], совместной с И.Х. Темроковым работой [Темроков, Мамхегов 1999], публикациями А.А. Столяра [Столяр 1976; Столяр, Черкасов 1985], И.Х. Темрокова [Темроков 1984], [Темроков 1994], В.В. Фирсова [Фирсов 1982], Р.С. Черкесова [Столяр, Черкасов 1985], а также энциклопедическими изданиями [Большая Советская Энциклопедия 1975], [Темроков 1994], [Философский словарь 1983]. Все они были изданы во времена «колмогоровской» реформы, но, на наш взгляд, они содержат много полезного и для настоящего времени.

I. Дидактико-методические аспекты проблемного обучения

Под методом вообще понимают систему осознанных действий человека к достижению цели.

Но одно дело, когда объектом метода является предмет неживой природы (например, метод вычисления приближённого значения функции), и другое – когда объектом метода становится интеллект. В последнем случае, если цели обучающего и обучаемого не совпадут, акт обучения не может состояться. В этом особенность, сложность, трудность и отличие метода обучения от метода воздействия на объект неживой природы.

Известно, обучение учащихся ставит различные задачи:

выработать навыки (умения, доведённые до автоматизма), например, быстрого счёта;

выработать умения (например, пользоваться счётно-измерительными инструментами и приборами);

вооружить учащихся знаниями основ науки;

развить творческие способности.

Ясно, что каждое из этих содержаний обучения требует адекватных методов, в противном случае можно не развить соответствующее содержание, а затормозить его. Так при выработке умений и навыков хорошо зарекомендовал себя репродуктивный метод, знания же передаются (приобретаются) с помощью объяснительно-иллюстрированного, эвристического методов и метода проблемного изложения; творческие способности приобретаются и совершенствуются с помощью исследовательского метода.

Репродуктивный и объяснительно-иллюстративный метод не имеют прямого отношения к теме нашей работы, эвристическим широко пользуются на практике. Более подробно рассмотрим метод проблемного изложения. Суть этого метода состоит в том, что в процессе обучения учащихся учитель ставит проблему, решает её сам, давая образец решения проблемы, тем самым обучая учащихся приёмам мышления при этом методе.

Проблема. Проблемная ситуация. Задача

Мы уже приводили пример проблемной ситуации (теорема о трёх перпендикулярах), однако есть необходимость в уточнении того, что мы понимаем под *проблемой*, *проблемной ситуацией* и *задачей*. Существуют различные, но в общем адекватные определения проблемы:

«Проблема (от греческого – задача) в широком смысле – сложный теоретический и практический вопрос, требующий изучения, разрешения» [Большая Советская Энциклопедия 1957, 7].

«Проблема (от греческого – преграда, трудность, задача) объективно возникающий в ходе развития познания вопрос или целостный комплекс вопросов, решение которых представляет существенный практический или теоретический интерес» [Философский словарь 1983, 533].

Итак, в каждом из этих определений «проблема» редуцируется к понятию «задача», но понятие «задача» (для ученика), само по себе аморфное, интуитивное. Конечно, стремление к ригоризму (безыдейной рецептуре) нежелательно, а тем более в школьном обучении, но без уточнения этих понятий, разговор о них беспредметный, не имеет смысла.

Приведём два определения задачи, которые в определённом смысле логически и психологически уточняют понятие «задача», а затем и понятие «проблемы».

Множество $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ с отношениями $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ на этом множестве назовём ситуацией $\{A_1, A_2, \dots, A_n; P_1, P_2, \dots, P_k\}$. Если все компоненты этой ситуации известны, она считается стационарной. Можно образовать сложную систему «человек-ситуация». Если какой-либо элемент ситуации неизвестен человеку, то такая система называется задачей.

На логико-математическом языке под задачей понимается требование отыскания области истинности

$M[(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k \wedge \varphi(P_1, P_2, \dots, P_m)]$, где φ – логическая операция над отношениями P_i .

Пример. Какими должны быть стороны прямоугольника периметра $P = 100$, чтобы его площадь была максимальной?

Обозначим стороны этого прямоугольника x и y . Тогда условие и требование задачи запишется: $M[(S, x, y) \in R^3 \wedge \varphi(S, x, y) \wedge P = 100] \Rightarrow S_{max}$, где φ – всевозможные наборы площадей прямоугольника при различных значениях x, y сторон прямоугольника, S – формула для площади прямоугольника и $S = xy$ [Темроков 1984].

Обычно проблемную ситуацию редуцируют к понятиям «проблема» и «задача». После формализованного определения последних, вернёмся к системе «человек-ситуация».

Из приведённых определений проблемы и задачи ещё пока не следует определение проблемной ситуации. От того, что в ситуации $\{A_1, A_2, \dots, A_n; P_1, P_2, \dots, P_k\}$ какой-нибудь элемент A_i или P_j не известен ещё не следует, что она стала проблемной ситуацией.

Если в системе «человек-ситуация» субъект (ученик) берёт на себя функцию найти этот неизвестный элемент этой поисковой ситуации, наступает *состояние возмущения взаимодействующей системы*, которая и называется проблемной. Но этого ещё мало. Чтобы она стала проблемной нужно еще чтобы:

эта ситуация была близкой и понятной из жизненного опыта человеку (ученику);

она представляла интерес своей естественностью;

человек, принявший к решению эту задачу (проблему) испытывал недостаток в знаниях, возможность и уверенность в приобретении последних при посильных интеллектуальных напряжениях.

Итак, проблемная ситуация – ситуация интеллектуального затруднения, в котором ученик испытывает необходимость в новых знаниях, имеет возможность в приобретении их.

Можно утверждать: чем чаще и грамотнее будут создаваться такие проблемные ситуации в обучении математике, тем эффективнее будет процесс обучения. При этом речь не идёт о натаскивании проблемных ситуаций ради моды, а о глубоко продуманном применении этого метода в обучении.

О путях же создания проблемных ситуаций в обучении математике речь пойдёт ниже.

Опыт, практика – стимул к изучению математического материала, источник проблемных ситуаций.

В обучении идеальным было бы следовать известной формуле В.И. Ленина «от живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике...» [Ленин 1969, с. 152–153].

Но в практике преподавания, к сожалению, редко когда реализуют эту формулу, хотя в процессе познания истины эта формула бесспорна и признана всеми, но в обучении, к сожалению, возникают объективные (в связи с дефицитом времени) причины, препятствующие полной реализации её.

Первая ступень этой формулы и реализуется через создание проблемных ситуаций, предваряющих теорию.

Пример. В X классе изучается теорема о свойствах перпендикуляра к плоскости: линия пересечения плоскостей, перпендикулярных третьей, перпендикулярна ей.

Изучению этой абстрактной теоремы можно предпослать такую беседу: когда каменщик кладёт стену, сначала выводит углы, а затем стены. В противном случае стена получится кривой, косой. Почему? Пример близкий опыту учащихся, возбуждающий любознательность. Эта беседа приведёт к необходимости изучения указанной теоремы.

Другой пример. Также в X классе изучается теорема о признаке параллельности плоскостей. Можно поставить вопрос, также предваряющий эту теорему: почему, желая узнать горизонтальность плоскости лимба, землеустроители дважды переставляют уровень по пересекающимся линиям лимба?

Эта задача побуждает также к необходимости изучения названной теоремы. Примеров сколько угодно, важно подобрать их и к месту приводить.

Проблемная ситуация в процессе применения изученного материала.

Известно, теория изучается ради её применения, а в процессе применения она глубже усваивается.

Третья ступень познания приведённой выше формулы В.И. Ленина и означает *применение теории*.

Очень часто в процессе применения изученной теории возникают проблемные ситуации.

Пример 1. Как вычислить $97 \cdot 103$ более удобным и коротким способом?

Эта задача может быть предложена после изучения формулы сокращённого умножения:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Пример 2. При аварии станка лопнула шестерёнка, от которой осталась часть в виде сегмента, меньшего полукруга. Нужно по этой части отобрать на складе шестерёнку нужного диаметра (Рис. 1). Как это сделать? Шестерёнок различных диаметров на складе много. Возникла проблема, с которой встречается рабочий на производстве.

Если внимательнее присмотреться к изученной в геометрии теории, то нетрудно вспомнить теорему о том, что если хорда и диаметр пересекаются внутри круга, то произведение отрезка хорды и диаметр пересекаются внутри круга, то произведение отрезков хорды равно произведению отрезков диаметра, т.е. $CE \cdot ED = AE \cdot BE$ или, если $CE = h$, то $DE = 2R - h$. Тогда $AE^2 = h(2R - h)$, отсюда и находится диаметр нужной шестерёнки.

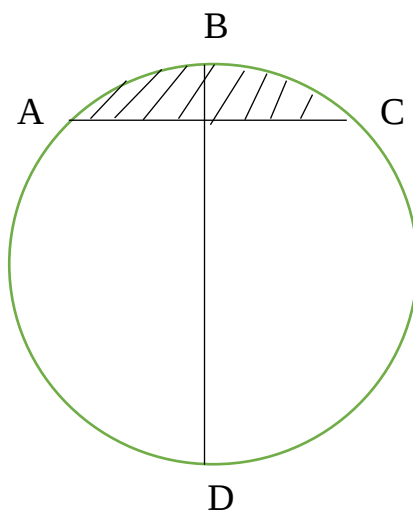


Рис. 1.

С такой задачей *должен справиться любой*, окончивший школу. Такая задача возникает в производственной деятельности, она реальна. В этом её ценность.

Примеры задач можно продолжить, в том числе рассмотреть проблемные ситуации, возникающие в процессе поиска средств решения задачи и при решении нешаблонных задач.

Ясно, что описанное положение не может устраивать производство, когда во весь голос и по всей стране заговорили о профессионализме. Последний должен закладываться на школьной скамье.

С другой стороны, те учащиеся, которые изучали теорию через проблемные ситуации, приобретают значительно более глубокие знания. Они проявляют большой интерес к математике, повышается их активность, у них успеваемость выше, знания глубже.

II. Примеры проблемных ситуаций в обучении математике

В этой части мы представляем материал в виде практических задач к разделам и темам школьного курса математики, который с пользой может быть использован для создания проблемных ситуаций на уроках математики. Мы рекомендуем использовать этот материал как дидактический в учебном процессе и пополняя его дополнять в дальнейшем. Это облегчит труд учителя в подборе такого материала и будет способствовать интенсификации процесса обучения математики в школе.

Сложение десятичных дробей

Перед изучением темы «Сложение десятичных дробей» сформулируем перед классом задачу:

Задача 1. На пальто израсходовали 3,14 м ткани, а на костюме 2,83 м. Сколько ткани израсходовали на пальто и костюм?

Учащимся ясно, что эту задачу нужно решить сложением чисел 3,14 и 2,83, но как их сложить они не знают, они же не изучали сложение десятичных дробей. Поэтому возникла необходимость в изучении правила сложения новых чисел. Теперь, правило сложения таких чисел они будут выучивать как необходимый материал для решения такой близкой задачи, в противном случае её решить невозможно.

Вычитание десятичных дробей

Аналогично перед изучением вычитания десятичных дробей предлагаем учащимся задачи:

Задача 2. Ученик слесаря зарабатывал 71,35 тыс. руб. в месяц. После получения квалифицированного разряда его месячный заработок стал 114,85 тыс. руб. На сколько увеличилась его месячная зарплата?

Задаю 3. От куска провода отрезали 4,75 м. Сколько метров осталось в куске, если в нём было 30,2 м?

Очевидно, каждая из них будет решаться действием вычитания, но вычитать десятичные дроби они не могут, а потому и здесь необходимо новое правило, к изучению которого и подойдём.

Умножение десятичных дробей

Традиционный способ обучения умножению десятичных дробей, при котором правило преподносится как данность, неэффективен. У них и так много правил, «зачем ещё одно» - так думают ученики.

Сформулируем сначала задачи.

Задача 4. Длина прямоугольника 0,5 дм, а его ширина 0,3 дм. Найдите площадь прямоугольника.

Задача 5. Один килограмм печенья стоит 1,64 руб. Сколько стоит 0,5 кг печенья?

Ясно, что эти задачи вызовут необходимость в правиле умножения десятичных дробей. После чего можно и сформулировать правило, как это предлагается в учебнике.

Деление на натуральное число

Задача 6. Кусок ленты длиной 8,46 м разрезали на 3 равные части. Найдите длину каждой части.

Деление на десятичную дробь

Задача 7. Площадь прямоугольника равна 2,88 дм, а его ширина 0,8 дм. Чему равна длина прямоугольника?

Из этих двух задач тоже очевидным образом следует, что нужны новые правила деления десятичной дроби на целое число, а затем и десятичной дроби на десятичную.

Арифметические действия над положительными и отрицательными числами

Основная цель – выработать прочные навыки арифметических действий с положительными и отрицательными числами.

Действия над отрицательными числами вводятся на основе представлений об изменении величин; сложение и вычитание чисел иллюстрируется «соответствующими перемещениями» точек прямой. Хорошо использовать для этого демонстрационный термометр. Показать на демонстрационном термометре повышение и понижение температуры и объяснить, что повышение температуры можно выражать изменением на положительное число, а понижение можно выражать изменением на отрицательное число.

Предстоит научить учащихся действиями над этими числами. Однако, как известно, эти действия отличаются от правил действий над положительными числами, иногда даже в глазах учащихся противостественны. Задача состоит в том, чтобы специальным подбором жизненных (а не абстрактных) задач показать необходимость и здесь в новых правилах, рассеять «неестественность».

Приведём такие задачи:

Задача 8. Вначале термометр показывал -3°C , через некоторое время температура изменилась на 6°C . Какую температуру стал показывать термометр?

Задача 9. Вначале термометр показывал -3°C , через некоторое время температура изменилась на -5°C . Какую температуру стал показывать термометр?

Очевидно обе эти задачи будут решаться действием сложения, но как складывать такие числа?

Учащиеся привыкли думать, что при сложении всегда получается больше, чем каждое из слагаемых, а здесь?

Как видно распространённые и близкие учащимся задачи приводят к необходимости новых чисел и новых правил действий над ними. В этом назначение проблемных ситуаций. Они видят необходимость и естественность этих чисел и правил.

Умножение положительных и отрицательных чисел

Учащимся необходимо разъяснить, что целое число (приход-расход; время — назад, вперед; направление — вверх, вниз и т.д.) выражает (характеризует) количественное состояние процесса.

Пример: - 4 - четыре часа назад, четыре вниз, четыре влево и т.д. Зная это, приступаем к умножению таких чисел.

Умножение противоположных чисел

Задача 10. Сейчас термометр показывает температуру 0° . Какую температуру будет показывать термометр через 6 часов, если за каждый час температура понижается на 2°C (-2°C)?

И здесь, очевидно, чтобы ответить на вопрос задачи нужно умножить 6 на (-2) . Но такого правила у них нет. Надо изучить.

Умножение отрицательных чисел

Задача 11. В 19 часов термометр показывает 0°C . Какую температуру показывал термометр 4 часа тому назад, если температура за каждый час понижалась на 2°C ?

Качественные рассуждения показывают, что температура 4 часа назад была $+8^{\circ}\text{C}$. С другой стороны, эту задачу можно решить действием умножения (так решались раньше аналогичные задачи). Но правила умножения отрицательных чисел у них нет, необходимость очевидна, а результат при умножении отрицательных чисел — положительное число.

Наименьшее общее кратное

Дать понятие наименьшего общего кратного (Н.О.К.), наибольшего общего делителя (Н.О.Д.), алгоритмов их нахождения необходимо, но как? Должен ученик видеть, что эти понятия и алгоритмы нужны? Если он этого не увидит сначала, разговор о них будет бесполезный. Возбуждению такого интереса посвящена приводимая задача.

Задача 12. Из порта А в порт В одновременно вышли 3 теплохода. Первый из них тратит на рейс туда и обратно 4 суток, второй 5 суток, а третий 6 суток. Через сколько суток все три теплохода окажутся снова вместе в порту А?

Очевидно, число (искомое) суток должно нацело делиться на каждое из чисел 4, 5, 6 и оно должно быть наименьшим из всех таких чисел. Следовательно, надо научиться правилу отыскания Н.О.К.

Сравнение дробей

Задача 13. Один рабочий изготовил 16 одинаковых деталей за 6 часов, а другой 24 таких же деталей за 15 часов. Какой из них тратил на изготовление одной детали больше времени и на сколько?

Как ответить на вопрос задачи, если не уметь сокращать и приводить к общему знаменателю дроби?

Задача 14. 20 шагов папы составляют 16 м, а 10 моих шагов 7 м. На сколько мой шаг короче шага папы?

И здесь, чтобы ответить на вопрос задачи нужно выразить величину шагов папы и моего в виде дроби, а затем сравнить их. Значит и здесь надо научиться тем же действиям с дробями.

Задача 15. Через узкую трубу бассейн наполняется за 10 часов, а через широкую за 4 часа. Какая труба даёт меньше воды: широкая за 3 часа или узкая за 7 часов?

Также и здесь.

Начала алгебры

Перед изучением темы «Пропорциональные величины» сформулируем задачи:

Задача 16. Для покраски пола площадью 16 м^2 израсходовали 1,2 кг краски. Сколько краски потребуется, чтобы покрасить пол площадью 40 м^2 ?

Очевидно, с увеличением площади, подлежащей покраске, увеличится потребное количество краски. Но как, по какому закону? Можно ли без этого (полагаться только на интуицию) решать эту и подобные ей задачи?

Или другая задача

Задача 17. За 7,5 м ткани заплатили 30 рублей. Сколько стоят 4,5 м такой ткани?

Чтобы уметь такие и подобные им задачи решать, надо изучить так называемые пропорциональные величины и их свойства. К чему и перейдём сейчас, а затем — как изложено в учебнике.

Сформулируем теперь такую задачу:

Задача 18. Поезд должен был пройти перегон между станциями, равный 120 км со скоростью 40 км/ч. Однако он двигался со скоростью 60 км/ч. За какое время прошёл он перегон?

Нетрудно заметить, что здесь уже величины скорость и время находятся также в определенной зависимости, но отличной от предыдущей. В самом деле. Разве с увеличением скорости увеличивается время движения поезда на одном и том же перегоне, как это было в предыдущих двух задачах. Значит, в жизни есть такие величины, которые зависят друг от друга так, что с увеличением одной уменьшается другая, но как? По какому закону? Об этом в этих двух задачах.

А вот другая задача

Задача 19. Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 3 раза?

Очевидно, и здесь площадь зависит от стороны, но не прямо и не обратно, как это было в предыдущих. Но задач этого типа в жизни сколько угодно, они выражаются функцией вид $y = x^2$, к изучению свойств которой перейдём (см. учебник).

Задача 20. Как изменится объём куба, если его ребро увеличить в 3 раза?

Задача 21. Как надо изменить ребро куба, чтобы его объём увеличился в 64 раза?

В этих задачах зависимость выражается уже в виде $y = x^3$. Все эти виды зависимости довольно распространены, а потому должны быть хорошо изучены.

Когда изучены формулы сокращённого умножения возникает необходимость показать, где они применяются.

Вот примеры таких задач:

Задача 22. Как можно более коротким способом (не перемножая как обычно) получить: а) произведения $98 \cdot 102$; $87 \cdot 93$; $6,01 \cdot 5,99$; $2,03 \cdot 1,97$; $29,8 \cdot 30,2$?

б) разности: $126^2 - 74^2$; $0,849^2 - 0,151^2$?

Задача 23. Как можно более коротким способом (не перемножая как обычно) вычислить: 105^2 ; 93^2 ; 983^2 ; 99^2 ; 199^2 ; $9,9^2$; 702^2 ; 999^2 ; 25^3 ; 29^3 ?

Задача 24. Как можно более коротким способом (не перемножая как обычно):

а) упростить выражения:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x - y)(x^2 + xy + y^2);$$
$$(m - n)(m^2 + mn + n^2) - (m + n)(m^2 - mn + n^2).$$

б) найти значение выражения:

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - 64, \text{ при } x = -0.5;$$
$$13 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9), \text{ при } x = -1;$$
$$x^3 - (x - 1)(x^2 + x + 1) + 5x, \text{ при } x = 0.6.$$

Очевидно, решение всех этих упражнений значительно упрощается применением соответствующих формул сокращённого умножения.

Квадратные уравнения

Задача 25. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2 .

Эта задача приводит к уравнению вида: $S = 4x + 20$, где x определяется из уравнения $x(x + 10) = 1200$.

Но последнее уравнение нелинейное, незнакомое пока учащимся уравнение, а потому надо сначала научиться решению их, к чему мы и приступим, в противном случае мы эту распространённую задачу не решим.

Неравенства

Перед изучением умножения числовых неравенств сформулируем задачу:

Задача 26. Известны границы длины a и ширины b (в метрах) комнаты прямоугольной формы: $7,5 \leq a \leq 7,6$ и $5,4 \leq b \leq 5,5$. Подойдёт ли это помещение для библиотеки, для которой требуется комната площадью не менее 40 м^2 ?

Если не научимся умножать числовые неравенства, мы не сможем ответить на вопрос задачи, а она жизненна.

Или вот ещё задача.

Задача 27. Длина одной стороны прямоугольника равна 6 см. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы периметр прямоугольника был больше 50 см?

Задача 28. Длина основания прямоугольного параллелепипеда 12 дм, ширина 5 дм. Какой должна быть высота параллелепипеда, чтобы его объём был меньше объёма куба с ребром 9 дм?

Задача 29. Если турист увеличит скорость на 1 км/ч, то за 4 часа он пройдёт расстояние, большее 20 км. Если уменьшить скорость на 1 км/ч, то за 5 часов он пройдёт расстояние, меньшее 20 км. Какова скорость туриста?

А здесь уже придётся решать системы неравенств.

Последние три задачи сюжетно интересны, распространены и практичны. Для их решения так же необходимо научиться решать системы неравенств.

Задача 30. Для премирования 12 пионеров надо купить краски и карандаши. Набор красок стоит 50 коп., а набор карандашей – 20 коп. Сколько наборов красок нужно купить, чтобы как можно лучше использовать выделенные на покупку 4 рубля?

Задача 31. На соревнованиях каждый стрелок делал 10 выстрелов. За каждое попадание он получал 5 очков, а за каждый промах снималось 2 очка. Победителем считался тот, кто набрал не менее 30 очков. Сколько раз стрелок должен был попасть в мишень, чтобы быть в числе победителей?

Задача 32. Животноводческий комплекс выделил под кормовые культуры 100 га. Колхоз решил использовать эту землю под посевы кукурузы и сахарной свеклы. Как распределить пашню между этими культурами, если уровень кукурузы 500 ц с гектара, а свеклы 200 ц с гектара, чтобы получить не менее 32000 ц урожая? Какая наименьшая площадь может быть засеяна кукурузой?

Вот, например, решение задачи № 29.

Пусть скорость туриста равна x км. Если турист будет идти со скоростью $(x + 1)$ км/ч, то за 4 часа он пройдёт $4(x + 1)$ км. По условию задачи. Если турист будет идти со скоростью $(x - 1)$ км/ч, то за 5 ч он пройдёт км. По условию задачи. Надо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 4(x + 1) > 20, \\ 5(x - 1) < 20. \end{cases}$$

Заменив каждое неравенство системы равносильным ему неравенством, получим систему:

$$\begin{cases} x > 4, \\ x < 5. \end{cases}$$

$4 < x < 5$ Значит, неизвестное значение должно удовлетворять условию.

Итак, скорость туриста больше 4 км/ч, но меньше 5 км/ч.

Арифметическая прогрессия. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

Задача 33. Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду один шар, во втором — два, в третьем — три и т.п.

Каково их число, если рядов 10? 100? Не будем же подсчитывать их число каждый раз. А если этих рядов 200, 300, ... n ? Видимо, надо научиться вычислять эту сумму для любого натурального n . Такая формула есть. На почве возникшей потребности, мы перейдём к её изучению как это сделано в учебнике.

Формулы n -го члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Задача 34. Некоторые бактерии, помещённые в питательную среду, делятся пополам каждые полчаса. Сколько бактерий в этом случае получится из одной бактерии в течение одного 10-го часа?

Задача 35. Найти число всех бактерий, образовавшихся в этом случае за 5 часов.

Эти задачи придётся решать уже с помощью других формул, называемых формулами n -го члена геометрической прогрессии и суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Первый признак равенства треугольника

Задача 36. Определить на местности расстояние между точками A и B , между которыми нельзя пройти с мерной лентой. (Рис. 2).

Ситуация знакомая, но решения у учащихся нет. Как определить расстояние между точками A и B ? Разумеется, его просто так не определишь.

Попробуем сообща с учащимися выполнить геометрические построения. Выберем такую точку C , из которой можно пройти и к точке A , и к точке B и из которой видны обе точки. Провешиваем расстояния AC и BC , продолжим их за точку C и отмерим $CD = AC$ и $EC = CB$. Получим два треугольника ACB и CED . Следует ли из этого, что $AB = ED$? Предложим учащимся разрезать лист бумаги с рис.2 на две части так, чтобы линия разреза проходила через точку C . Образовались два треугольника ACB и CED . Затем вращением совместим точку C с собой и направим CD по CA , CE по CB (это возможно, так как $\angle ACB = \angle ECD$, как вертикальные). Очевидно, точка D совместится с точкой A , а E с B , причём так будет у всех. Отсюда следует: $AB = ED$, а ED доступно измерению, также имеем другой важный

вывод: раз у всех так получилось, такие треугольники «всегда» будут равны, но это надо логически доказать.

Такая необходимость возникла очевидным образом. Доказать это и значит изучить теорему (признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними). Дальнейшее можно проследить по учебнику.

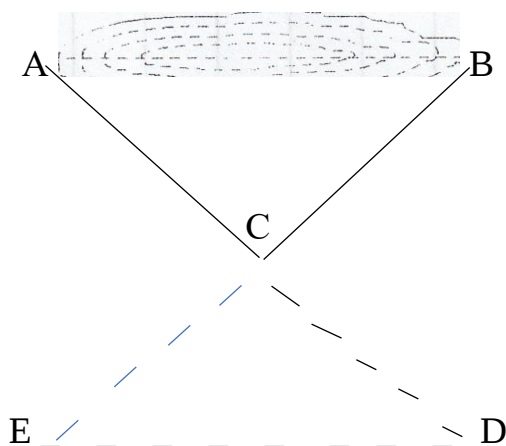


Рис. 2

Заключение

В заключении заметим: если учесть, что материал по всем разделам школьной математики для создания проблемных ситуаций будет собираться и накапливаться, то трудности для подбора соответствующего материала будут ослаблены.

Проблемные ситуации придётся создавать, если мы хотим активизировать познавательную деятельность учащихся, повышать интерес к изучению математики и, конечно, дело тут не в «моде на проблемное обучение». На практике же, к сожалению, то и дело «дают» раздел за разделом, тему за темой, доказательство за доказательством, а тем – каково отношение учащихся к ним, видят ли они необходимость в них, проявляют ли они интерес и активность к ним учитывают не многие, отсюда поверхностные знания по математике.

Систему дидактических принципов при преломлении на методику преподавания математики, на наш взгляд, целесообразно дополнить принципом проблемности: учебный процесс должен протекать в виде последовательности создания и снятия проблемных ситуаций. И чем чаще мы обращаемся к проблемному методу обучения, тем лучше, лишь бы не отставать от программы по времени.

Список источников и литературы

1. Большая Советская Энциклопедия. Т. 21. Изд. 3-е. – Москва : Советская энциклопедия, 1975. 640 с.
2. Конспекты лекций по методике преподавания математики. 1985/1986 уч. год. Лектор: А.Б. Мамхегов. Рукопись.
3. Ленин В.И. Полное собрание сочинений. – Москва : Издательство политической литературы, 1969. Т. 29. 782 с.
4. Лоповок Л.М. Создание и использование проблемных ситуаций в процессе преподавания математики // Математика в школе. 1977. № 3. С. 17–21.
5. Мамхегов А.Б. Математическое развитие учащихся как результат целенаправленной учебной математической деятельности // Научно-методический журнал «Поиск научных решений». 2023. №3. С. 30–50.
6. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. Изд. 2. – Москва : Учпедгиз, 1946. 488 с.
7. Столяр А.А. Педагогика математики. – Минск : Высшая школа, 1976 (Изд. 2-е: 1984), 255 с.
8. Столяр А.А., Черкасов Р.С. Методика преподавания математики. – Москва : Просвещение, 1985. 336 с.
9. Темроков И.Х. Методика преподавания математики. – Нальчик : КБГУ, 1984. 202 с.
10. Темроков И.Х., Мамхегов А.Б. Проблемные ситуации в обучении математике в средней школе. – Нальчик, 1999. – 46 с.
11. Темроков И.Х. Три вопроса методики преподавания математики. – Нальчик, 1994. 28 с.
12. Философский словарь. – Москва : Советская энциклопедия. 1983. 840 с.
13. Фирсов В.В. Пути повышения эффективности преподавания математики в современных условиях // Математика в школе. – 1982, № 5.

References

1. Bol'shaya Sovetskaya Entsiklopediya [Great Soviet Encyclopedia], vol. 21, 3rd ed. Moscow, Sovetskaya Entsiklopediya Publ., 1975, 640 pp., *in Russian*.
2. Konspekty lektsiy po metodike prepodavaniya matematiki. 1985/1986 uch. god [Lecture notes on the methodology of teaching mathematics, 1985/1986 academic year]. Lecturer: A.B. Mamkhegov. Manuscript, *in Russian*.
3. Lenin V.I. Polnoe sobranie sochineniy [Complete works], vol. 29. Moscow, Izdatelstvo politicheskoy literatury [Publishing House of Political Literature], 1969, 782 pp., *in Russian*.
4. Lopovok L.M. Sozdanie i ispol'zovanie problemnykh situatsiy v protsesse prepodavaniya matematiki [Creating and using problem situations in the

process of teaching mathematics]. *Matematika v shkole [Mathematics in School]*, 1977, no. 3, pp. 17–21, *in Russian*.

5. Mamkhegov A.B. Matematicheskoe razvitie uchashchikhsya kak rezul'tat tselenapavlennoy uchebnoy matematicheskoy deyatel'nosti [Mathematical development of students as a result of purposeful educational mathematical activity], *Search for Scientific Solutions*, 2023, no. 3, pp. 30–50, *in Russian*.

6. Rubinshteyn S.L. Osnovy obshchey psikhologii [Foundations of general psychology], 2nd ed. Moscow, Uchpedgiz Publ., 1946, 488 pp., *in Russian*.

7. Stolyar A.A. Pedagogika matematiki [Pedagogy of mathematics]. Minsk, Vysheyshaya shkola Publ., 1976 (2nd ed.: 1984), 255 pp., *in Russian*.

8. Stolyar A.A., Cherkasov R.S. Metodika prepodavaniya matematiki [Methods of teaching mathematics]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1985, 336 pp., *in Russian*.

9. Temrokov I.Kh. Metodika prepodavaniya matematiki [Methods of teaching mathematics]. Nalchik, Kabardino-Balkarian State University, 1984, 202 pp., *in Russian*.

10. Temrokov I.Kh., Mamkhegov A.B. Problemnye situatsii v obuchenii matematike v sredney shkole [Problem situations in teaching mathematics in secondary school]. Nalchik, 1999, 46 pp., *in Russian*.

11. Temrokov I.Kh. Tri voprosa metodiki prepodavaniya matematiki [Three questions of the methodology of teaching mathematics]. Nalchik, 1994, 28 pp., *in Russian*.

12. Filosofskiy slovar' [Philosophical dictionary]. Moscow, Sovetskaya Entsiklopediya Publ., 1983, 840 pp., *in Russian*.

13. Firsov V.V. Puti povysheniya effektivnosti prepodavaniya matematiki v sovremennykh usloviyakh [Ways to improve the effectiveness of teaching mathematics in modern conditions], *Matematika v shkole [Mathematics in School]*, 1982, no. 5, *in Russian*.