

УДК 37: 519.2

Для цитирования: Архестова Л.Ж. Об особенностях преподавания учебного курса «Вероятность и статистика» // Научно-методический журнал «Поиск научных решений». 2024. № 4. С. 77–95.

DOI: 10.61077/2949-4818-2024-4-77-95

**Об особенностях преподавания курса
«Вероятность и статистика»**

Архестова Лариса Жамалдиновна

Государственное бюджетное учреждение
дополнительного профессионального образования «Центр непрерывного
повышения профессионального мастерства педагогических работников»
Министерства просвещения и науки Кабардино-Балкарской Республики

Аннотация. В работе рассматриваются особенности преподавания учебного курса «Вероятность и статистика» в 7–11 классах в условиях введения Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (ФГОС ООО) и среднего общего образования (ФГОС СОО). Описаны цели и задачи изучения данного учебного курса, подходы к его реализации, некоторые методы и приемы, способствующие формированию у учащихся базовых знаний по курсу. Приведены примеры практических заданий и рекомендаций по интеграции курса в учебный процесс. Также в работе подчеркивается, что знание теории вероятностей и статистики может иметь применение во многих профессиональных областях, где приходится работать с данными или принимать решения на основе статистических параметров. В работе говорится об использовании «Теории вероятностей и статистики» для развития функциональной грамотности, затрагиваются перспективы изучения этой дисциплины в школе.

Материалы, приведенные в работе, могут быть использованы методическими объединениями учителей-предметников, а также самими учителями для организации эффективного обучения учебного курса и подготовке учащихся к государственной итоговой аттестации, при планировании учебного процесса и выборе методик обучения.

Ключевые слова: математика, курс, вероятность, статистика, учащиеся, образовательная организация, КИМ, ФГОС ООО, ФГОС СОО, преподавание, программа, государственная итоговая аттестация, методические рекомендации.

About the features of teaching the "Probability and statistics" course

Arkhestova Larisa Zhamaldinovna

State Budgetary Institution of Additional Professional Education
"Center for Continuous Development of Professional Mastery of Teaching Staff"
of the Ministry of Enlightenment and Science of the Kabardino-Balkarian Republic

Abstract. The paper examines the features of teaching the "Probability and Statistics" course in grades from 7 to 11 in the context of the introduction of the Federal State Educational Standard of Basic General Education and Federal State Educational Standard of Secondary Basic Education. It describes the goals and objectives of studying this course, approaches to its implementation, some methods and techniques that contribute to the formation of students' basic knowledge of the course. Examples of practical tasks and recommendations for including the course into the learning process are given. The article also emphasizes that the knowledge of probability theory and statistics can be used in many professional fields where one has to work with data or make decisions based on statistical parameters. The article describes the use of "Probability Theory and Statistics" for the development of functional literacy, and discusses the prospects of studying the discipline at school.

The materials presented in the work can be used by methodological associations of subject teachers, as well as by the teachers themselves, to organize effective teaching of the training course and prepare students for the state summative assessment, while planning the educational process and choosing teaching methods.

Keywords: Mathematics, course, probability, statistics, students, educational organization, control measuring materials, Federal State Educational Standard of Basic General Education, Federal State Educational Standard of Secondary Basic Education, teaching, program, state summative assessment, methodological recommendations.

В современном мире статистические и вероятностные методы приобретают все большее значение на фоне широкого внедрения цифровых технологий в экономическую сферу, общественную деятельность и повседневную жизнь. Знания в этой сфере играют ключевую роль на разных уровнях общего и профессионального образования и в различных профессиональных областях.

Изучение теории вероятностей и статистики в образовательных учреждениях открывает широкие возможности для их применения в таких разных сферах жизни, как наука, предпринимательство, экономика, финансы, исследовательская деятельность и процесс принятия обоснованных решений. Количество профессий, которые требуют основательной подготовки в области статистики и теории вероятностей, значительно увеличивается. Это создает необходимость в развитии у школьников элементов вероятностно-статистического мышления и внедрения отдельного учебного курса «Вероятность и статистика» в школьную программу по математике.

Курс «Вероятность и статистика» учебного предмета «Математика» имеет богатую и многообразную историю развития. На протяжении почти двух веков становления математического образования в России неоднократно ставился вопрос об изучении вероятностно-статистического материала в средних общеобразовательных учреждениях и, соответственно, предлагались конкретные планы и программы.

Во время реформы математического образования под руководством академика А.Н. Колмогорова в программу средней общеобразовательной школы были введены элементы комбинаторики и теории вероятностей (1965–1984 гг.), которые затем были исключены из программы при отказе от теоретико-множественного подхода в построении школьной математики (середина 1990-х годов).

В 1990-х годах были предприняты более настойчивые попытки ввести элементы вероятности в школьные программы и учебники для средней школы. Появился первый учебник, целиком посвященный теории вероятностей (авторы Е.А. Бунимович и В.А. Булычев).

Задания по теории вероятностей давно включены в математические конкурсы, олимпиады для школьников. Требование к учащимся уметь решать вероятностные задачи и применять статистические методы упоминается уже в федеральном компоненте государственного образовательного стандарта основного общего образования, утвержденного Минобрнауки России в 2004 году [Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего, среднего (полного) общего образования... 2004]. На протяжении последних двух десятилетий было разработано и внедрено множество образовательных программ, в том числе программы дополнительного образования для детей, которые включают изучение основ теории вероятности и математической статистики для учащихся 5–11 классов. Наконец, с 2023/2024 учебного года курс «Вероятность и статистика» окончательно становится обязательным в рамках учебного предмета «Математика».

Внедрение этого курса направлено на формирование у учащихся совокупности умений и навыков, таких как:

умение оперировать понятиями (случайный опыт/случайный эксперимент, элементарное событие/элементарный исход случайного опыта, случайное событие, вероятность события);

умение находить вероятности случайных событий в опытах с равновероятными элементарными событиями;

умение решать задачи методом организованного перебора и с использованием правила умножения;

умение оценивать вероятности реальных событий и явлений, понимать роль практически достоверных и маловероятных событий в окружающем мире и в жизни;

знакомство с понятием независимых событий;

знакомство с законом больших чисел и его ролью в массовых явлениях;

умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, приводить примеры математических закономерностей в природе и жизни, распознавать проявление законов математики и др.

Внедрение теории вероятности в школьный курс позволяет также развивать у обучающихся логическое мышление, анализировать ситуации, решать поставленные задачи, находить пути их решения и возможности сопоставлять и применять данные знания в реальной жизни [Куприенко, Сергеева 2023].

В Федеральной рабочей программе учебного курса «Вероятность и статистика» цели его изучения для 7–9 классов определены следующим образом: «Каждый человек постоянно принимает решения на основе имеющихся у него данных. А для обоснованного принятия решения в условиях недостатка или избытка информации необходимо, в том числе хорошо сформированное вероятностное и статистическое мышление. Именно поэтому остро встала необходимость сформировать у обучающихся функциональную грамотность, включающую в себя в качестве неотъемлемой составляющей умение воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных процессов и зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты» [Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика» (Для 5-9 классов...)... 2023].

В соответствии с данными целями в структуре программы учебного курса «Вероятность и статистика» основного общего образования выделены следующие содержательно-методические линии: «Представление данных и описательная статистика», «Вероятность», «Элементы комбинаторики», «Введение в теорию графов».

Понятие вероятности вводится как мера правдоподобия случайного события. При изучении учебного курса обучающиеся знакомятся с простейшими методами вычисления вероятностей в случайных экспериментах с равновероятными элементарными исходами, вероятностными законами, позволяющими ставить и решать более сложные задачи. В учебный курс входят начальные представления о случайных величинах и их числовых характеристиках.

В рамках курса осуществляется знакомство обучающихся с множествами и основными операциями над множествами, рассматриваются примеры применения для решения задач, а также использования в других математических курсах и учебных предметах [Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика» (для 10–11 классов...)... 2023].

Учебный курс «Вероятность и статистика» для 10–11 классов базового уровня служит продолжением и углублением одноимённого курса, преподаваемого на уровне основного общего образования. Основные цели изучения данного курса в старших классах заключаются в формировании у учащихся статистической грамотности и осознания значения теории вероятностей как инструмента для анализа случайных явлений, чисел и процессов. Во время изучения курса учащиеся углубляют свои знания о методах исследований динамичного мира, а также развивают понимание важности единых математических методов познания, рассматриваемых как неотъемлемая часть современного научного мировоззрения.

В результате у обучающихся должно сформироваться представление о наиболее употребительных и общих математических моделях, используемых для описания антропометрических и демографических величин, погрешностей в различного рода измерениях, длительности безотказной работы технических устройств, характеристик массовых явлений и процессов в обществе [Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика» (базовый уровень) 2023].

В соответствии с указанными целями в структуре учебного курса «Вероятность и статистика» в системе среднего общего образования на базовом уровне выделены следующие основные содержательные линии: «Случайные события и вероятности», «Случайные величины и закон больших чисел».

Содержание линии «Случайные события и вероятности» служит основой для формирования представлений о распределении вероятностей между значениями случайных величин, а также эта линия необходима как база для изучения закона больших чисел – фундаментального закона, действующего в природе и обществе и имеющего математическую формализацию. Сам закон больших чисел предлагается в ознакомительной форме с минимальным использованием математического формализма.

Темы, связанные с непрерывными случайными величинами, акцентируют внимание обучающихся на описании и изучении случайных явлений с помощью непрерывных функций. Основное внимание уделяется показательному и нормальному распределениям. При этом предполагается

ознакомительное изучение материала без доказательств применяемых фактов.

В 2024/2025 учебном году обучение математике в 10–11 классах проводится в соответствии со ФГОС ООО, ФГОС СОО и ФРП по математике. Согласно, обновленным ФГОС ООО учебный предмет «Математика» включает в себя учебные курсы «Алгебра», «Геометрия», «Вероятность и статистика». В соответствии с этими документами учебный предмет «Вероятность и статистика» является обязательным предметом на данных уровнях образования.

Для создания рабочей программы по курсу «Вероятность и статистика», в том числе разработки поурочного планирования, учитель может воспользоваться «Конструктором рабочих программ». По сравнению с 2023/2024 учебным годом в поурочные планирования для 10 и 11 классов, представленные в Конструкторе, добавлены ссылки на электронные цифровые образовательные ресурсы, а к началу 2024/2025 учебного года в поурочные планирования для 5–9 классов добавлены ссылки на задания для формирования функциональной математической грамотности.

До выхода государственных учебников для организации обучения в 10–11 классах учитель может использовать учебники, включённые в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации программ общего образования, а также учебники, исключённые из перечня, в соответствии с установленными предельными сроками их использования.

Рассмотрим некоторые методические приемы, способствующие формированию у учащихся базовых знаний по вероятности и статистике.

Положения общего подхода к преподаванию статистики и теории вероятностей в школе:

1. Дать целостное, законченное, разумеется, на начальном уровне, представление о теории вероятностей и статистике и их тесной взаимосвязи.
2. Подчеркнуть тесную связь этих разделов математики с окружающим миром как на этапе введения математических понятий, так и в ходе использования полученных результатов.
3. Избегать математического формализма там, где это только возможно.
4. Избегать классических примеров и задач, утративших актуальность для общества.
5. Сопровождать рассказ яркими, доступными и запоминающимися примерами для формирования интереса учащихся и лучшего усвоения материала [Тюрин, Макаров, Высоцкий, Яценко 2009: 15–16].

Особое внимание следует уделить некоторым методическим приемам, использованным в учебном пособии И. Р. Высоцкого, И.В. Яценко “Теория вероятностей и статистика: 7-9 классы” (Москва: Просвещение, 2023), и играющим важную роль в преподнесении всего материала:

- наглядность и простота изложения;
- минимальный математический формализм в записи выражений и определениях;
- подчеркивание связи вводимых понятий с реальной практикой;
- использование сквозных примеров и задач при обсуждении разных тем;
- подчеркнутая ясность и простота формулировок большинства задач;
- выделение более сложных задач и размещение их в конце обсуждаемой темы;
- отсутствие однозначного ответа в некоторых задачах и вопросах. В основном, эти задачи предполагают обсуждение в классе, и требуют от учащихся разумного обоснования своего мнения;
- осуществление подбора примеров и задач с учетом различных интересов и возрастных особенностей развития учащихся;
- проведение небольших практических исследований (измерений) и экспериментов (случайных опытов) для лучшего понимания природы случайной изменчивости и смысла вероятности;
- возможность повторения и закрепления на новом материале пройденного ранее [Тюрин, Макаров, Высоцкий, Яценко 2009, 21].

Разберём некоторые типы задач по теории вероятностей и статистике.

Задачи на игральную кость

Когда необходимо найти вероятность некоторого события при условии, что какое-то другое событие произошло, используется формула условной вероятности. Вероятность наступления события A при условии, что B наступило, равна отношению вероятности одновременного наступления этих событий и вероятности наступившего события B вычисляется по формуле:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Задача 1. Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 2 очка»?

Решение: Выпишем возможные исходы как тройки чисел так, чтобы в сумме получилось 6

	1 1 4	2 1 3	3 1 2	4 1 1
	1 2 3	2 2 2	3 2 1	
	1 3 2	2 3 1		
	1 4 1			
Всего	4	3	2	1

Всего 10 возможных исходов. Благоприятные исходы помечены красным цветом, их 7. Значит, $P(A) = 10$, $P(AB) = 7$. По определению условной вероятности $P(B|A) = \frac{7}{10} = 0,7$. Ответ: 0,7

Задача 2. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 2 очка.

Решение: Найдём вероятность того, что второй раз выпало 2 очка при условии, что сумма двух бросков равна 6. Выпишем возможные варианты получения 6 очков в сумме: 15, 51, 24, 42, 33. Подходит только вариант (4;2). Получается один случай из 5 возможных. Вероятность этого события равна $1 : 5 = 0,2$.

Ответ: 0,2

Задача 3. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до тысячных.

Решение: Используем таблицу выпадения очков (таблица 1)

Таблица 1.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4						
5						
6						

Всего 36 исходов. Если при первом броске выпало 1 очко, то для второго броска 1 и 2 не подходят, так как сумма очков должна превысить число 3. Подходят 3, 4, 5, 6. Если при первом броске выпало 2 очка, то для второго броска 1 не подходит. Подходят 2, 3, 4, 5, 6. Если при первом броске

выпало 3 очка, то для второго броска подходят 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если при первом броске выпадет 4 очка, то уже при одном броске получится число очков большее 3. Такие варианты нас не устраивают. Выделим желтым цветом благоприятные исходы (сумма очков превысила число 3 ровно за два броска), их-15. Вероятность искомого события $P = 15:36 = 0,416... \approx 0,42$.

Ответ: 0,42.

Дерево случайного опыта

Эффективным приемом для решения задач на условную вероятность является дерево случайного опыта, примеры использования которого рассмотрены в статье И. Высоцкого и В. Шапариной [Высоцкий, Шапарина 2021: 18]. Дерево случайного опыта или дерево вероятностей – удобный инструмент решения задач, который позволяет рассматривать составной эксперимент как бы «по частям», мысленно расположить случайные события во времени или разбить на этапы. Объясним, как строить дерево эксперимента, на примерах.

Задача 1. Велосипедист едет по парковой дорожке (рис. 1) и планирует выехать из парка через один из пяти выходов (A , B , C , D или E).

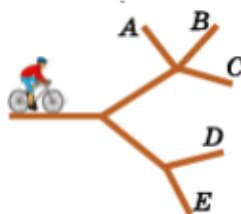


Рис. 1

Велосипедист едет только вперед и на каждой развилке случайным образом выбирает одну из дорожек, по которой еще не ехал. Какова вероятность того, что велосипедист покинет парк: а) через выход A ; б) через выход E ? Желательный результат обсуждения. Начальное состояние, когда велосипедист не проехал ни один из перекрестков, изобразим точкой S (рис. 2).

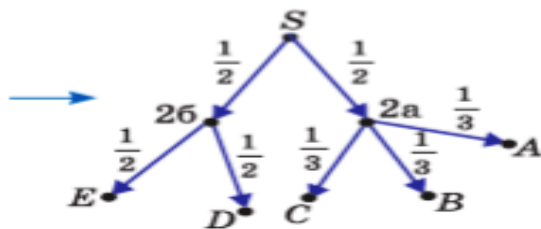


Рис. 2

Начальную точку, конечную и точки ветвления будем называть вершинами дерева. На первом перекрестке велосипедист может с равными шансами поехать к одному из двух перекрестков – назовем их $2a$ и $2б$. Проведем стрелки от точки S вниз, вправо и влево. Стрелки будем называть ребрами дерева. Около ребер подпишем вероятности событий: в нашем случае вероятности равны $\frac{1}{2}$, так как, по условию, велосипедист выбирает дальнейший путь случайным образом. Предположим, что велосипедист поехал к перекрестку $2a$. После этого может наступить одно из трех событий: он направится к выходу A , к выходу B или к выходу C . Изобразим эти элементарные исходы точками A , B и C и проведем к ним ребра. Вероятности тоже будут одинаковы и равны $\frac{1}{3}$.

Аналогично изобразим варианты, когда велосипедист поехал к перекрестку $2б$. Обратите внимание учащихся на то, что сумма вероятностей около всех ребер, выходящих из одной вершины равна 1. При построении дерева эксперимента важно за этим следить.

Элементарные события эксперимента в дереве изображаются конечными вершинами дерева. К каждой конечной вершине ведет единственная цепочка от точки S . Поэтому можно считать, что элементарные события изображаются не только конечными вершинами, но и ведущими к ним цепочками. Например, в нашей задаче пять элементарных исходов и, соответственно, пять цепочек. Событию «велосипедист выехал через выход A » соответствует цепочка $S \rightarrow 2a \rightarrow A$. Вероятности, которые мы подписывали на ребрах, – условные. Например, условная вероятность того, что велосипедист покинет парк через выход A , при условии, что он был на перекрестке $2a$, равна $\frac{1}{3}$.

Теперь нужно найти вероятности всех возможных элементарных событий. Для этого, пользуясь правилом умножения вероятностей, необходимо найти произведения условных вероятностей вдоль каждой цепочки, ведущей от S к конечной вершине. Найденные произведения нужно сложить. Подпишите полученные вероятности на рисунке рядом с элементарными событиями (рис. 3).

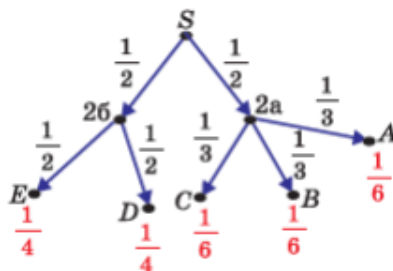


Рис. 3

Сумма всех вероятностей должна равняться единице (как сумма вероятностей элементарных событий).

Разберем задачу на условную вероятность с использованием дерева случайного опыта.

Задача 2.

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Известно, что 3 % готовых батареек неисправны. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка поступит в продажу.

Решение: Построим дерево вероятностей (рис. 4).

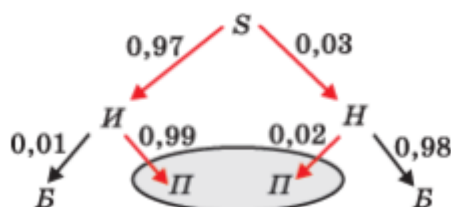


Рис. 4

Событие «батарейка исправна» обозначим буквой *И*, а событие «батарейка неисправна» – буквой *Н*. Батарейки, забракованные системой контроля (а точнее, событие «батарейка забракована системой»), обозначим буквой *Б*, событие «батарейка не забракована» обозначим буквой *П*. Событию *П* «батарейка не забракована» благоприятствуют цепочки СИП и СНП. Найдем вероятность этого события по формуле полной вероятности, как сумму вероятностей двух благоприятствующих ему элементарных событий, то есть цепочек СИП и СНП.

$$P(\Pi) = P(S\Pi\Pi) + P(SH\Pi\Pi) = 0,97 \cdot 0,99 + 0,03 \cdot 0,02 = 0,9609.$$

Ответ: 0,9609.

Дерево вероятностей – это эффективный и универсальный способ для решения задач. Даже при минимальных навыках техники решение задач этим способом становятся популярным инструментом для решения множества задач.

Геометрическая вероятность

Приведем примеры задач, в которых раскрывается геометрический смысл вероятности. Пусть на плоскости задана некоторая область D , площадь которой равна $S(D)$, и в ней содержится область d , площадь которой равна $s(d)$. В области D наудачу ставится точка. Тогда вероятность события A – «точка попадает в область d » равна числу $P(A) = \frac{s(d)}{S(D)}$.

Алгоритм решения задач на геометрическую вероятность:

1. Найти меру всей области $S(D)$ (длину, площадь, объем).
2. Найти меру “полезной” области $s(d)$ (длину, площадь, объем).
3. Найти отношение меры “полезной” области ко всей области. Это и будет искомая вероятность.

Задача 1. Лена пообещала подруге Наде позвонить в промежутке от 9 ч до 10 ч утра. Найдите вероятность того, что разговор начнется в промежутке от 9 ч 20 мин до 9 ч 25 мин (рис. 5).

Решение:



$$P(A) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

Рис. 5

Ответ: 1/12

Задача 2. Какова вероятность Вашей встречи с другом, если вы договорились встретиться в определенном месте, с 18:00 до 19:00 часов, и ждёте в течение 15 минут друг друга?

Решение: Обозначим за x и y время прихода, $0 \leq x, y \leq 60$ (минут). В прямоугольной системе координат этому условию удовлетворяют точки, лежащие внутри квадрата $OABC$ (рис. 6). Друзья встретятся, если между моментами их прихода пройдет не более 5 минут, то есть

$$y - x < 15, y > x$$

$$x - y < 15, x > y$$

Этим неравенствам удовлетворяют точки, лежащие в области G , очерченной красным цветом.

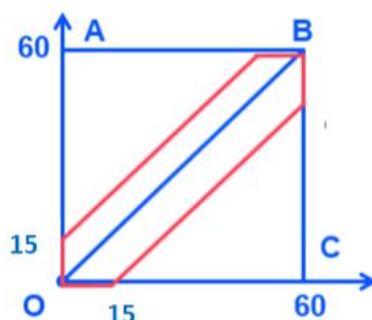


Рис. 6

Найдем меру всей области. В нашем случае, область представляет собой квадрат со стороной 60. Площадь квадрата 3600. Найдем меру “полезной” области. Из площади всей области вычтем меру “ненужной”. Найдем отношение меры “полезной” области ко всей области.

Тогда вероятность встречи равна отношению площадей G и квадрата, то есть $P(A) = \frac{S(G)}{S(OABC)} = \frac{60 \cdot 60 - 45 \cdot 45}{60 \cdot 60} = \frac{63}{144} = 0,4375$

Следовательно, вероятность встречи двух друзей равна 0,4375.

Ответ: 0,4375.

Диаграммы (круги) Эйлера-Венна

Очень часто решение задачи помогает найти рисунок. Использование рисунка делает решение простым и наглядным. Приведем примеры решения задач с помощью диаграмм (кругов) Эйлера.

Задача 1. На диаграмме Эйлера (рис. 7) показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ – условную вероятность события B при условии A.

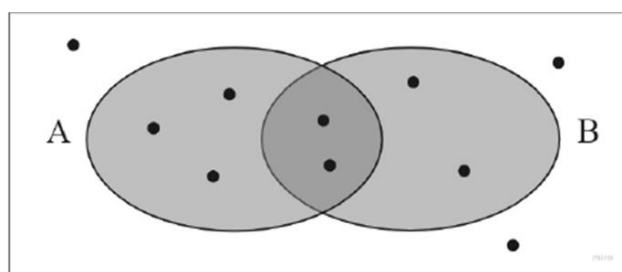


Рис. 7.

Из диаграммы определяем, что: $P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{4}{10}$, $P(AB) = \frac{2}{10}$.

Подставим найденные значения в формулу условной вероятности, получим:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2 \cdot 10}{10 \cdot 5} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

Задача 2. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

Решение: Рассмотрим события A = кофе закончится в первом автомате, B = кофе закончится во втором автомате. Тогда, $A \cdot B$ = кофе закончится в обоих автоматах, $A + B$ = кофе закончится хотя бы в одном автомате.

По условию $P(A) = P(B) = 0,25$; $P(A \cdot B) = 0,15$.

События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на их произведение:
 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,25 + 0,25 - 0,15 = 0,35$.

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0,35 = 0,65$.

Решим эту задачу с помощью диаграммы Эйлера. Рассмотрим события

A = кофе закончится в первом автомате,

B = кофе закончится во втором автомате.

Тогда $A \cdot B$ = кофе закончится в обоих автоматах. Эти события зависимы. И действительно, одно из них влияет на другое. Если в торговом центре в одном из автоматов больше нет кофе, то во втором автомате он закончится быстрее, потому что к нему пойдут все, кто хочет выпить кофе. Кроме того, события «кофе закончился в 1-м автомате» и «кофе закончился во 2-м автомате» совместны, то есть, возможно, наступление и того, и другого события. Нарисуем диаграмму (рис. 8).

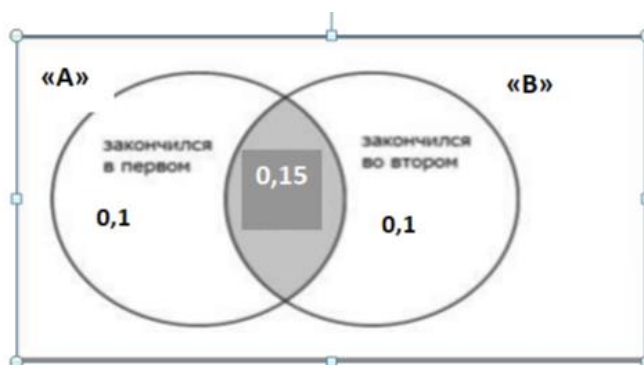


Рис. 8

Левый круг соответствует событию «А». Правый – «В». Пересечение кругов – событию «АВ». Найдем вероятность искомого события как разность площади прямоугольника принятого за единицу и площади фигуры внутри прямоугольника. Чтобы посчитать площадь фигуры внутри прямоугольника (P_1), мы складываем площади частей, на которые она разделена $0,1+0,15+0,1=0,35$ или же складываем площадь первого круга и площадь второго, а затем вычитаем площадь их пересечения, поскольку она посчитана дважды. Таким образом, мы нашли вероятность события «кофе закончился хотя бы в одном из автоматов» (в первом, во втором или в обоих). Чему же равна вероятность события «кофе остался в обоих автоматах»? Очевидно, что кофе может либо остаться в обоих автоматах, либо закончиться хотя бы одним. Вместе эти события образуют полную группу событий и сумма их вероятностей равна единице. Вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах $P_2 = 1 - P_1 = 1 - 0,35 = 0,65$.

Ответ: 0,65.

Одним из действенных способов обучения элементам теории вероятностей и статистике является внедрение проектной и исследовательской деятельности. Например, ученикам можно предложить провести проект, связанный с анализом температурных данных в нашей республике за последние несколько лет, или исследовать вероятность сдачи девятиклассниками ОГЭ по математике без двоек. Подобные задания способствуют тому, чтобы школьники применяли теоретические знания на практике, а также развивают их навыки работы с данными и формирование выводов на основе проведенного анализа.

Необходимо, чтобы школьники имели возможность решать задачи, соответствующие реальной жизни. К примеру, задачи по вычислению шансов выпадения конкретной комбинации в настольной игре или анализ

результатов опроса среди учащихся помогают развить в них понимание стохастических концепций и обучают применять статистические методы для обработки информации. Преподаватель также может задействовать задачи на создание графиков и диаграмм, интерпретацию собранных данных и проверку научных гипотез.

Ключевым аспектом преподавания нового курса является внедрение современных информационных технологий. Учащиеся получают возможность взаимодействовать с компьютерными приложениями и онлайн-платформами, которые способствуют их исследовательской деятельности, построению графиков, проведению вероятностных моделирований и анализу полученных данных. Такой метод не только оживляет уроки и делает их более увлекательными, но и способствует развитию у обучающихся навыков работы с информацией и современными компьютерными инструментами.

В условиях введения ФГОС ООО и ФГОС СОО курс «Вероятность и статистика» может быть интегрирован в учебный процесс через межпредметные связи. К примеру, элементы курса можно применить на уроках географии для изучения климатической информации в виде получения средних показателей температуры, ветра, количества осадков, влажности, атмосферного давления, облачности и т. п. Использовать формулы комбинаторики в химии или на занятиях по биологии, физике для обработки экспериментальных данных. Задачи по вероятности и статистике могут быть построены на содержании других дисциплин. Например, на анализе данных медицинских исследований или показателей численности и плотности населения стран мира.

Это способствует формированию целостного представления о математических методах и их использовании в разных областях науки. В заключение, стоит отметить, что реализация курса «Вероятность и статистика» в рамках новых стандартов ФГОС для общего и среднего образования требует применения актуальных образовательных подходов, включения практико-ориентированных заданий и создания междисциплинарных связей в обучении. Это не только способствует развитию математической грамотности у школьников, но и формирует важные навыки критического анализа, интерпретации данных и принятия обоснованных решений, которые необходимы для их успешной образовательной и профессиональной карьеры.

Таким образом, преподавание курса «Вероятность и статистика» для школьников в рамках реализации обновленного ФГОС по математике

представляет собой целенаправленный процесс, нацеленный на совершенствование математических знаний и умений учащихся, а также на развитие их способности применять математику в повседневной жизни. Интеграция практических задач, использование современных технологий и связь с реальными ситуациями делают этот курс не только информативным, но и увлекательным для школьников.

Все это должно обеспечить эффективное освоение базовых, но кардинально новых для школьников понятий из статистики и теории вероятностей, стимулировать заинтересованность к изучению математики и формированию современного мировосприятия с навыками адаптации в динамично меняющемся мире.

Список литературы

1. Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего, среднего (полного) общего образования : приказ Министерства образования Российской Федерации от 05.03.2004 № 1089 (с изменениями и дополнениями). Информационно-правовая система «ГАРАНТ». – URL : <https://base.garant.ru/6150599/> (дата обращения: 31.07.2024).
2. Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика» (базовый уровень) (Для 5–9 классов образовательных организаций). ФГБНУ «ИСРО», Москва, 2023.
3. Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика» (базовый уровень) (для 10–11 классов образовательных организаций). ФГБНУ «ИСРО», Москва, 2023.
4. Высоцкий И., Шапарина В. Об условной вероятности в школе // Математика. Методический журнал. 2021. № 2. С. 12–21.
5. Куприенко Е.И., Сергеева Т.Ф. Методические материалы по обучению курсу «Вероятность и статистика» в 7-11 классах для педагогов, внедряющих обновленные ФГОС ООО И ФГОС СОО. ФГАОУ ДПО «Академия Минпросвещения России». Москва, 2023. – URL : <https://iro22.ru/wp-content/uploads/2023/10/metodicheskie-materialy-verojatnost-i-statistika.pdf?ysclid=m3rcyz0y3756249742> (дата обращения: 31.07.2024).
6. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Преподавание теории вероятностей и статистики в школе по учебному пособию Ю.Н. Тюрин, А.А. Макарова «Теория вероятностей и статистика» // Математика в школе. 2009. №7. С. 13–29.

References

1. Ob utverzhdenii federal'nogo komponenta gosudarstvennykh obrazovatel'nykh standartov nachal'nogo obshchego, osnovnogo obshchego, srednego (polnogo) obshchego obrazovaniya: prikaz Ministerstva obrazovaniya Rossiiskoi Federatsii ot 05.03.2004 № 1089 (s izmeneniyami i dopolneniyami) [On the approval of the federal component of the state educational standards of primary general, basic general, secondary (full) general education: Order of the Ministry of Education of the Russian Federation of 5 March 2004 No. 1089 (with amendments and additions)], Information and legal system "Garant", available at: <https://base.garant.ru/6150599/> (accessed 31 July 2024), *in Russian*.
2. Federal'naya rabochaya programma po uchebnomu predmetu «Matematika» (bazovyi uroven') (Dlya 5–9 klassov obrazovatel'nykh organizatsii) [Federal working program on the academic subject "Mathematics" (basic level) (For grades from 5 to 9 of educational institutions)], Federal State Budgetary Institution "Institute of Educational Development Strategy", Moscow, 2023.
3. Federal'naya rabochaya programma po uchebnomu predmetu «Matematika» (bazovyi uroven') (Dlya 10–11 klassov obrazovatel'nykh organizatsii) [Federal working program on the academic subject "Mathematics" (basic level) (For grades from 10 to 11 of educational institutions)], Federal State Budgetary Institution "Institute of Educational Development Strategy", Moscow, 2023.
4. Vysotskii I., Shaparina V. Ob uslovnoi veroyatnosti v shkole [On conditional probability in school], *Matematika. Metodicheskii zhurnal* [Mathematics. Methodical journal], 2021, no. 2, pp. 12–21.
5. Kuprienko E.I., Sergeeva T.F. Metodicheskie materialy po obucheniyu kursu "Veroyatnost' i statistika" v 7–11 klassakh dlya pedagogov, vnedryayushchikh obnovlennye FGOS OOO i FGOS SOO [Methodological materials for teaching the course "Probability and statistics" in grades from 7 to 11 for teachers implementing the updated Federal State Educational Standard of Basic General Education and Federal State Educational Standard of Secondary Basic Education], FGAOU DPO "Akademiya Minprosveshcheniya Rossii" [Federal State Autonomous Educational Institution of Additional Professional Education "Academy of the Ministry of Enlightenment of Russia"], Moscow, 2023, available at: <https://iro22.ru/wp-content/uploads/2023/10/metodicheskie-materialy-veroyatnost-i-statistika.pdf?ysclid=m3rcyjj0y3756249742> (accessed 31 July 2024), *in Russian*.
6. Tyurin Yu.N., Makarov A.A., Vysotskii I.R., Yashchenko I.V. Prepodavanie teorii veroyatnostei i statistiki v shkole po uchebnomu posobiyu Yu.N. Tyurina, A.A. Makarova «Teoriya veroyatnostei i statistika» [Teaching probability theory and statistics at school according to the textbook "Probability

theory and statistics" by Yu.N. Tyurin, A.A. Makarov], *Mathematics at School*, 2009, no. 7, pp. 13–29.